

Übungsblatt 5

Fundamentaltbereiche und Spitzen

17. Kongruenzgruppen der Stufe 2 (Fortsetzung).

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\pm S, T^2$ eine der Untergruppen der Stufe 2 aus Aufgabe 16 erzeugen. Diese Untergruppe wurde von Hecke Γ_{ϑ} genannt.
- (b) (1 Punkt) Sei $\bar{\Gamma}^0(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \mid b \equiv 0 \pmod{2} \right\} / \{\pm 1\}$. Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}^0(2)$ von TST und T^2 erzeugt wird, und dass $\bar{\Gamma}_0(2)$ von T und ST^2S erzeugt wird.
- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}(2)$ von den Elementen T^2 und $ST^{-2}S$ erzeugt wird.
- (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}_0(4)$ von den Elementen T und $ST^{-4}S$ erzeugt wird.

Hinweis: Benutzen Sie die Resultate aus den Aufgaben 15 und 16.

18. Fundamentaltbereich von $\Gamma_0(p^n)$.

- (a) (2 Punkte) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die folgende Liste von Elementen aus Γ_1 ein vollständiges Vertretersystem $\{\alpha_i\}$ für $\Gamma_0(p^n)$ in Γ_1 ist, d.h. dass $\Gamma_1 = \bigcup_i \alpha_i \Gamma_0(p^n)$ eine disjunkte Vereinigung ist:

$$\begin{aligned} &1, \\ &T^{-k}S, \quad k = 0, \dots, p^n - 1 \\ &ST^{-kp}S, \quad k = 1, 2, \dots, p^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Zählen und vergleichen Sie die Äquivalenzklassen.

- (b) (1 Punkt) Benutzen Sie Aufgabe (a) um den Fundamentaltbereich von $\Gamma_0(4)$ zu zeichnen.
- (c) (1 Punkt) Benutzen Sie Aufgabe (a) um den Fundamentaltbereich von $\Gamma_0(p)$ zu beschreiben. Zeichnen Sie den Fundamentaltbereich von $\Gamma_0(3)$.

19. Spitzen der Kongruenzgruppen der Stufe 2.

- (a) (2 Punkte) Der Fundamentalbereich von $\Gamma(2)$ besitzt drei Randpunkte in den Punkten $\infty, 0, -1$. Zeigen Sie, dass $\Gamma(2)$ drei Spitzen besitzt, d.h. dass die drei Punkte $\Gamma(2)$ -inäquivalent zueinander sind.
- (b) (2 Punkte) Wie viele Spitzen besitzt jede der Kongruenzgruppen aus Aufgabe 16 ?

20. Spitzen von $\Gamma_0(p)$ und $\Gamma_0(p^2)$.

- (a) (2 Punkte) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\Gamma_0(p)$ zwei Spitzen in den Punkten ∞ und 0 besitzt.
- (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\Gamma_0(p^2)$ $p + 1$ Spitzen besitzt: $\infty, 0$ und $-\frac{1}{kp}$ für $k = 1, \dots, p - 1$.

Abgabetermin: Dienstag, 28. 11. 2017 um 10:00 Uhr.